**第五讲曲线与方程**

id:2147490992;FounderCES

题组 曲线方程的求法

1*.*[2015浙江,7,5分]如图10*-*5*-*1,斜线段*AB*与平面*α*所成的角为60*°*,*B*为斜足,平面*α*上的动点*P*满足∠*PAB=*30*°*,则点*P*的轨迹是()

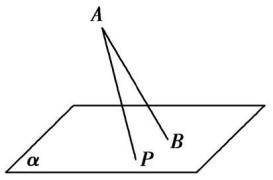


图10*-*5*-*1

A.直线 B.抛物线 C.椭圆 D.双曲线的一支

2*.*[2016全国卷Ⅲ,20,12分][理]已知抛物线*C*:*y*2*=*2*x*的焦点为*F*,平行于*x*轴的两条直线*l*1,*l*2分别交*C*于*A*,*B*两点,交*C*的准线于*P*,*Q*两点*.*

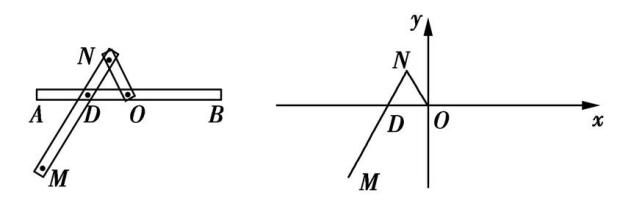
(Ⅰ)若*F*在线段*AB*上,*R*是*PQ*的中点,证明*AR*∥*FQ*;

(Ⅱ)若△*PQF*的面积是△*ABF*的面积的两倍,求*AB*中点的轨迹方程*.*

3*.*[2015湖北,21,14分][理]一种作图工具如图10*-*5*-*2(1)所示*.O*是滑槽*AB*的中点,短杆*ON*可绕*O*转动,长杆*MN*通过*N*处铰链与*ON*连接,*MN*上的栓子*D*可沿滑槽*AB*滑动,且*DN=ON=*1,*MN=*3*.*当栓子*D*在滑槽*AB*内作往复运动时,带动*N*绕*O*转动一周(*D*不动时,*N*也不动),*M*处的笔尖画出的曲线记为*C.*以*O*为原点,*AB*所在的直线为*x*轴建立如图10*-*5*-*2(2)所示的平面直角坐标系*.*

(Ⅰ)求曲线*C*的方程;

(Ⅱ)设动直线*l*与两定直线*l*1:*x-*2*y=*0和*l*2:*x+*2*y=*0分别交于*P*,*Q*两点*.*若直线*l*总与曲线*C*有且只有一个公共点,试探究:△*OPQ*的面积是否存在最小值?若存在,求出该最小值;若不存在,说明理由*.*



(1)(2)

图10*-*5*-*2

4*.*[2014新课标全国Ⅰ,20,12分]已知点*P*(2,2),圆*C*:*x*2*+y*2*-*8*y=*0,过点*P*的动直线*l*与圆*C*交于*A*,*B*两点,线段*AB*的中点为*M*,*O*为坐标原点*.*

(Ⅰ)求*M*的轨迹方程;

(Ⅱ)当*|OP|=|OM|*时,求*l*的方程及△*POM*的面积*.*

id:2147491020;FounderCES

**A组基础题**

1*.* [2018武汉市部分学校调研测试,9]已知不等式3*x*2*-y*2*>*0所表示的平面区域内一点*P*(*x*,*y*)到直线*y=x*和直线*y=-x*的垂线段分别为*PA*,*PB*,若△*PAB*的面积为,则点*P*轨迹的一个焦点坐标可以是()

A.(2,0) B.(3,0) C.(0,2) D.(0,3)

2*.*[2018广东七校第一次联考,20]已知动点*M*到定点*F*1(*-*2,0)和*F*2(2,0)的距离之和为4*.*

(1)求动点*M*的轨迹*C*的方程;

(2)设*N*(0,2),过点*P*(*-*1,*-*2)作直线*l*,交曲线*C*于不同于*N*的两点*A*,*B*,直线*NA*,*NB*的斜率分别为*k*1,*k*2, 求*k*1*+k*2的值*.*

3*.*[2018唐山市高三五校联考,20]在直角坐标系*xOy*中,长为*+*1的线段的两端点*C*,*D*分别在*x*轴、*y*轴上滑动,*=.*记点*P*的轨迹为曲线*E.*

(1)求曲线*E*的方程;

(2)经过点(0,1)作直线与曲线*E*相交于*A*,*B*两点,*=+*,当点*M*在曲线*E*上时,求四边形*AOBM*的面积*.*

**B组提升题**

4*.*[2017太原市三模,16]已知过点*A*(*-*2,0)的直线与*x=*2相交于点*C*,过点*B*(2,0)的直线与*x=-*2相交于点*D*,若直线*CD*与圆*x*2*+y*2*=*4相切,则直线*AC*与*BD*的交点*M*的轨迹方程为*.*

5*.*[2018惠州市二调,20]已知*C*为圆(*x+*1)2*+y*2*=*8的圆心,*P*是圆上的动点,点*Q*在圆的半径*CP*上,且有点*A*(1,0)和*AP*上的点*M*,满足·*=*0,*=*2*.*

(1)当点*P*在圆上运动时,求点*Q*的轨迹方程;

(2)若斜率为*k*的直线*l*与圆*x*2*+y*2*=*1相切,与(1)中所求点*Q*的轨迹交于不同的两点*F*,*H*,*O*是坐标原点,且≤·≤时,求*k*的取值范围*.*

6*.*[2017石家庄市二模,20]已知圆*C*:(*x-*1)2*+y*2*=r*2(*r>*1),设*A*为圆*C*与*x*轴负半轴的交点,过点*A*作圆*C*的弦*AM*,并使弦*AM*的中点恰好落在*y*轴上*.*

(1)求点*M*的轨迹*E*的方程;

(2)延长*MC*交曲线*E*于另一点*N*,曲线*E*在点*N*处的切线与直线*AM*交于点*B*,试判断以点*B*为圆心,线段*BC*的长为半径的圆与直线*MN*的位置关系,并证明你的结论*.*

**答案**

id:2147494643;FounderCES

1*.*C由题意知,线面角为60*°*,∠*PAB=*30*°*,因此*AP*的轨迹在空间上是一个以*AB*为轴线,*A*为顶点的圆锥侧面,用一个与圆锥轴线成60*°*角的平面截圆锥,所得图形为椭圆*.*故选C*.*

2*.*由题意知*F*(,0)*.*设*l*1:*y=a*,*l*2:*y=b*,则*ab*≠0,且*A*(,*a*),*B*(,*b*),*P*(*-*,*a*),*Q*(*-*,*b*),*R*(*-*,)*.*

记过*A*,*B*两点的直线为*l*,则*l*的方程为2*x-*(*a+b*)*y+ab=*0*.*

(Ⅰ)由于*F*在线段*AB*上,故1*+ab=*0*.*

记*AR*的斜率为*k*1,*FQ*的斜率为*k*2,则

*k*1*=====-b=k*2*.*

所以*AR*∥*FQ.*

(Ⅱ)设*l*与*x*轴的交点为*D*(*x*1,0),则*S*△*ABF=|b-a||FD|=|b-a||x*1*-|*,*S*△*PQF=.*

由题设可得*|b-a||x*1*-|=*,所以*x*1*=*0(舍去)或*x*1*=*1*.*

设满足条件的*AB*的中点为*E*(*x*,*y*)*.*

当*AB*与*x*轴不垂直时,由*kAB=kDE*可得*=*(*x*≠1)*.*

而*=y*,所以*y*2*=x-*1(*x*≠1)*.*

当*AB*与*x*轴垂直时,*E*与*D*重合*.*

所以所求轨迹方程为*y*2*=x-*1*.*

3*.*(Ⅰ)设点*D*(*t*,0)(*|t|*≤2),*N*(*x*0,*y*0),*M*(*x*,*y*),依题意,

*=*2,且*||=||=*1,

所以(*t-x*,*-y*)*=*2(*x*0*-t*,*y*0),且

即且*t*(*t-*2*x*0)*=*0*.*

由于当点*D*不动时,点*N*也不动,所以*t*不恒等于0,

于是*t=*2*x*0,故*x*0*=*,*y*0*=-*,代入*+=*1,可得*+=*1,

即所求的曲线*C*的方程为*+=*1*.*

(Ⅱ)*①*当直线*l*的斜率不存在时,直线*l*为*x=*4或*x=-*4,都有*S*△*OPQ=×*4*×*4*=*8*.*

*②*当直线*l*的斜率存在时,设直线*l*:*y=kx+m*(*k*≠*±*),

由消去*y*,可得(1*+*4*k*2)*x*2*+*8*kmx+*4*m*2*-*16*=*0*.*

因为直线*l*总与椭圆*C*有且只有一个公共点,

所以*Δ=*64*k*2*m*2*-*4(1*+*4*k*2)(4*m*2*-*16)*=*0,即*m*2*=*16*k*2*+*4(*\**)*.*

又由可得*P*(,);同理可得*Q*(,)*.*

由原点*O*到直线*PQ*的距离为*d=*和*|PQ|=|xP-xQ|*,可得*S*△*OPQ=|PQ|*·*d=|m||xP-xQ|=*·*|m||+|=||*(*\*\**)*.*

将(*\**)代入(*\*\**)得,*S*△*OPQ=||=*8*.*

当*k*2*>*时,*S*△*OPQ=*8()*=*8(1*+*)*>*8;

当0≤*k*2*<*时,*S*△*OPQ=*8()*=*8(*-*1*+*)*.*

因为0≤*k*2*<*,所以0*<*1*-*4*k*2≤1,所以≥2,所以*S*△*OPQ=*8(*-*1*+*)≥8,

当且仅当*k=*0时取等号*.*

所以当*k=*0时,*S*△*OPQ*的最小值为8*.*

综合*①②*可知,当直线*l*与椭圆*C*在四个顶点处相切时,△*OPQ*的面积取得最小值8*.*

4*.*(Ⅰ)圆*C*的方程可化为*x*2*+*(*y-*4)2*=*16,所以圆心为*C*(0,4),半径为4*.*

设*M*(*x*,*y*),则*=*(*x*,*y-*4),*=*(2*-x*,2*-y*)*.*由题设知·*=*0,故*x*(2*-x*)*+*(*y-*4)(2*-y*)*=*0,即(*x-*1)2*+*(*y-*3)2*=*2*.*

由于点*P*在圆*C*的内部,所以*M*的轨迹方程是(*x-*1)2*+*(*y-*3)2*=*2*.*

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知*M*的轨迹是以点*N*(1,3)为圆心,为半径的圆*.*

由于*|OP|=|OM|*,故*O*在线段*PM*的垂直平分线上,又*P*在圆*N*上,从而*ON*⊥*PM.*

因为*ON*的斜率为3,所以*l*的斜率为*-*,故*l*的方程为*y=-x+.*

又*|OM|=|OP|=*2,*O*到*l*的距离为,*|PM|=*,所以△*POM*的面积为*.*

id:2147494650;FounderCES

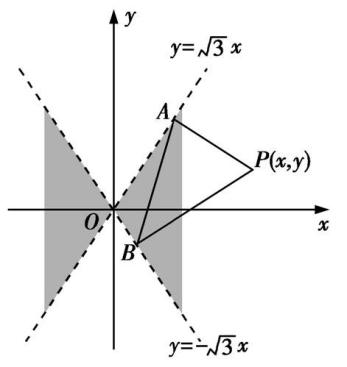
**A组基础题**

1*.*A不等式3*x*2*-y*2*>*0⇒(*x-y*)(*x+y*)*>*0⇒或其表示的平面区域如图D 10*-*5*-*1中阴影部分所示*.*点*P*(*x*,*y*)到直线*y=x*和直线*y=-x*的距离分别为*|PA|==*,*|PB|==*,

由题意知∠*AOB=*120*°*,∴∠*APB=*60*°*,

∴*S*△*PAB=×|PA|×|PB|*sin 60*°=×*,又*S*△*PAB=*,

∴*×=*,∴3*x*2*-y*2*=*3,即*x*2*-=*1,∴*P*点轨迹是双曲线,其焦点为(*±*2,0),故选A*.*



图D 10*-*5*-*1

2*.*(1)由椭圆的定义,可知点*M*的轨迹是以*F*1,*F*2为焦点,

4为长轴长的椭圆*.*

由*c=*2,*a=*2,得*b=*2*.*

故动点*M*的轨迹*C*的方程为*+=*1*.*

(2)当直线*l*的斜率存在时,设其方程为*y+*2*=k*(*x+*1),

由得(1*+*2*k*2)*x*2*+*4*k*(*k-*2)*x+*2*k*2*-*8*k=*0*.*

*Δ=*[4*k*(*k-*2)]2*-*4(1*+*2*k*2)(2*k*2*-*8*k*)*>*0,则*k>*0或*k<-.*

设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),则*x*1*+x*2*=-*,*x*1*x*2*=.*

从而*k*1*+k*2*=+*

*=*

*=*2*k-*(*k-*4)

*=*4*.*

当直线*l*的斜率不存在时,得*A*(*-*1,),*B*(*-*1,*-*),

所以*k*1*+k*2*=*4*.*

综上,恒有*k*1*+k*2*=*4*.*

3*.*(1)设*C*(*m*,0),*D*(0,*n*),*P*(*x*,*y*)*.*

由*=* ,得(*x-m*,*y*)*=*(*-x*,*n-y*),

所以解得

由*||=+*1,得*m*2*+n*2*=*(*+*1)2,

所以(*+*1)2*x*2*+y*2*=*(*+*1)2,

整理,得曲线*E*的方程为*x*2*+=*1*.*

(2)设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),

由*=+*,知点*M*坐标为(*x*1*+x*2,*y*1*+y*2)*.*

由题意知,直线*AB*的斜率存在*.*

设直线*AB*的方程为*y=kx+*1,代入曲线*E*的方程,得

(*k*2*+*2)*x*2*+*2*kx-*1*=*0,

则*x*1*+x*2*=-*,*x*1*x*2*=-.*

*y*1*+y*2*=k*(*x*1*+x*2)*+*2*=.*

由点*M*在曲线*E*上,知(*x*1*+x*2)2*+=*1,

即*+=*1,解得*k*2*=*2*.*

这时*|AB|=|x*1*-x*2*|==*,

原点到直线*AB*的距离*d==*,

所以平行四边形*OAMB*的面积*S=|AB|*·*d=.*

**B组提升题**

4*.+y*2*=*1(*y*≠0)设点*M*(*x*,*y*),*C*(2,*m*),*D*(*-*2,*n*),则直线*CD*的方程为(*m-n*)*x-*4*y+*2(*m+n*)*=*0,因为直线*CD*与圆*x*2*+y*2*=*4相切,所以*=*2,所以*mn=*4,又直线*AC*与*BD*的交点为*M*,所以解得所以*-=*4,所以点*M*的轨迹方程为*+y*2*=*1(*y*≠0)*.*

5*.*(1)由题意知*MQ*是线段*AP*的垂直平分线,

所以*|CP|=|QC|+|QP|=|QC|+|QA|=*2*>|CA|=*2,

所以点*Q*的轨迹是以点*C*,*A*为焦点,焦距为2,长轴长为2的椭圆,

所以*a=*,*c=*1,*b==*1,

故点*Q*的轨迹方程是*+y*2*=*1*.*

(2)设直线*l*:*y=kx+t*,*F*(*x*1,*y*1),*H*(*x*2,*y*2),

直线*l*与圆*x*2*+y*2*=*1相切⇒*=*1⇒*t*2*=k*2*+*1*.*

联立直线*l*与点*Q*的轨迹方程,得⇒(1*+*2*k*2)*x*2*+*4*ktx+*2*t*2*-*2*=*0,

*Δ=*16*k*2*t*2*-*4(1*+*2*k*2)(2*t*2*-*2)*=*8(2*k*2*-t*2*+*1)*=*8*k*2*>*0⇒*k*≠0,

*x*1*+x*2*=*,*x*1*x*2*=*,

所以·*=x*1*x*2*+y*1*y*2

*=*(1*+k*2)*x*1*x*2*+kt*(*x*1*+x*2)*+t*2

*=+kt+t*2

*=-+k*2*+*1

*=*,

所以≤≤⇒≤*k*2≤⇒≤*|k|*≤,

所以*-*≤*k*≤*-*或≤*k*≤*.*

故*k*的取值范围是[*-*,*-*]∪[,]*.*

6*.*(1)设*M*(*x*,*y*),*x>*0,由题意可知,*A*(1*-r*,0),记*AM*的中点为*D*,则*D*(0,),

因为*C*(1,0),*=*(1,*-*),*=*(*x*,)*.*

在圆*C*中,易知*CD*⊥*DM*,所以·*=*0,

所以*x-=*0,即*y*2*=*4*x*(*x>*0),

所以点*M*的轨迹*E*的方程为*y*2*=*4*x*(*x>*0)*①.*

(2)以点*B*为圆心,线段*BC*的长为半径的圆与直线*MN*相切*.*证明如下:

设直线*MN*的方程为*x=my+*1*②*,*M*(*x*1,*y*1),*N*(*x*2,*y*2),直线*BN*的方程为*y=k*(*x-*)*+y*2*③.*

联立*①②*,得消去*x*,得*y*2*-*4*my-*4*=*0,所以*y*1*+y*2*=*4*m*,*y*1*y*2*=-*4*.*

由(1)知,*r-*1*=x*1,则点*A*(*-x*1,0),所以直线*AM*的方程为*y=*(*x+x*1),又*=*4*x*1(*x*1*>*0),可得*y=x+　④.*

联立*①③*,得消去*x*,得*ky*2*-*4*y+*4*y*2*-k=*0,由*Δ=*0,可得*k=*,

所以直线*BN*的方程为*y=x+　⑤.*

联立*④⑤*,得解得*xB=-*1,*yB=====*2*m*,

所以点*B*(*-*1,2*m*),

*|BC|=*,点*B*到直线*MN*的距离*d===|BC|*,

所以以点*B*为圆心,线段*BC*的长为半径的圆与直线*MN*相切*.*